# 統計的機械学習　（応用計量分析２）第11回

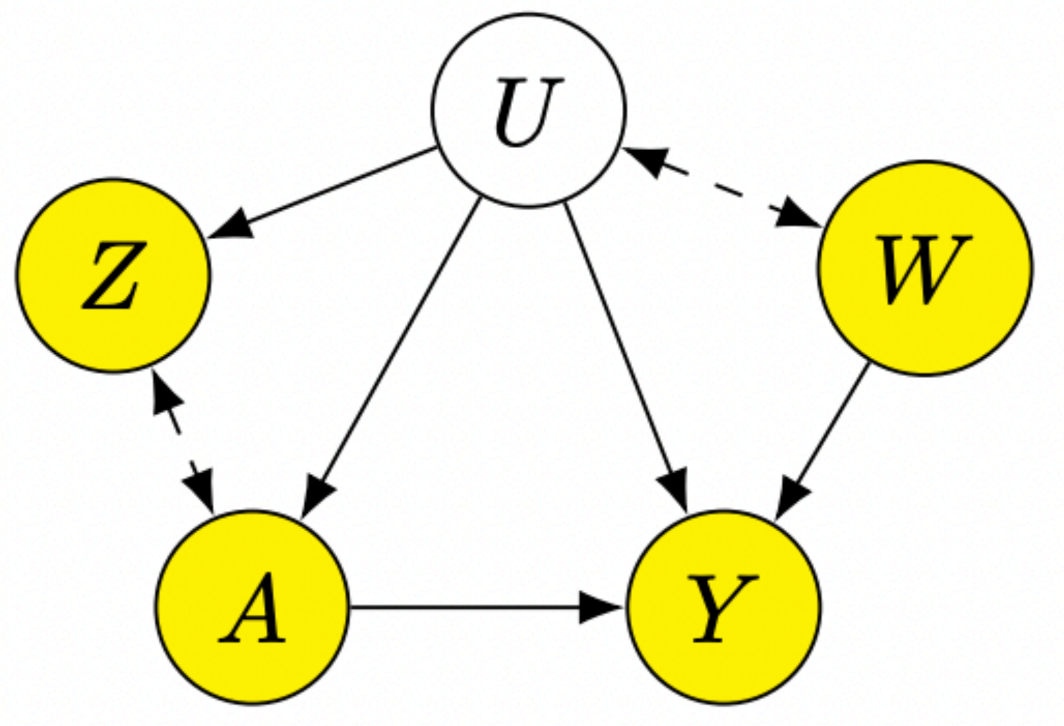
発展的な意思決定理論（参考pdf 15章、16章）

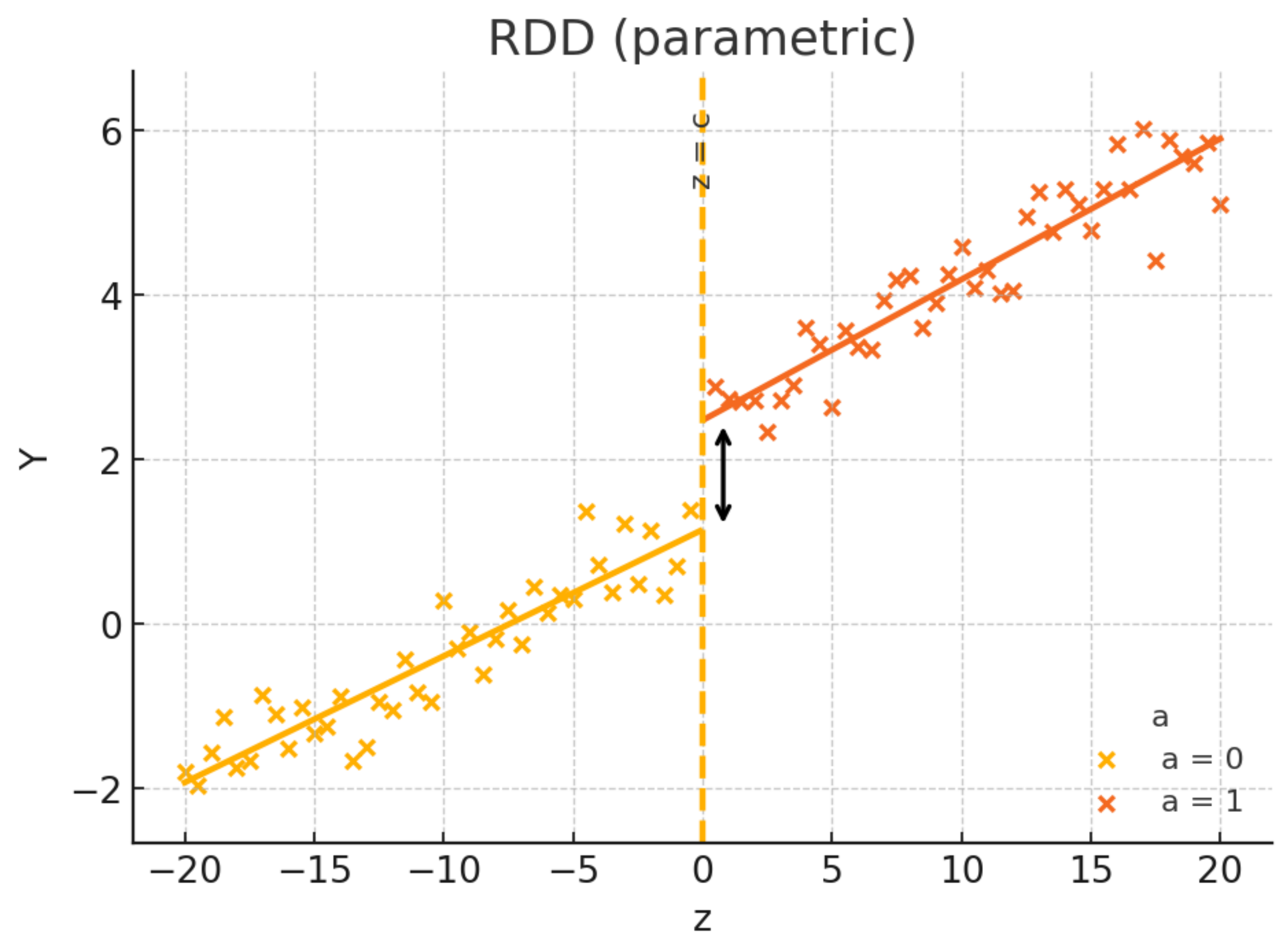
# 振り返り

出欠コード
XXXX

## 未観測交絡因子への対処法（その３）代理変数法
## 正値性を満たさない決定論的行動割り当て状況の手法RDD

- 代理変数法は未観測交絡を通したバックドアパスの相関を代理変数を用いて推定して差し引く
- RDDはカットオフ点周りで決定論的に行動の割り当てが決まる場合に、その周辺を比較することでカットオフ点周りの因果効果を推定する
  - パラメトリックな手法とノンパラメトリックな手法



# 本日の内容

出欠コード
XXXX

## 因果推論以外の手法も含めて意思決定のための土台となる意思決定理論を扱う

- 1. ガイダンス・因果推論と機械学習の概論
- 2. 意思決定理論（期待効用理論）の復習、因果推論との関係
- 3. 潜在結果モデルに基づく因果推論の枠組み
- 4. 平均因果効果の推定法
- 5. 条件付き平均因果効果（CATE）の推定法１：メタ学習器
  - CATEの推定法２：二重機械学習
- 6. CATEの推定法３：決定木と決定森
  - 深層学習に基づく方法
- 7. 構造方程式モデルとバックドア基準
- 8. 因果探索
- 9. 発展的な因果推論手法：フロントドア調整、操作変数法
- 10. 発展的な因果推論手法：代理変数法、回帰不連続デザイン
- **11. 発展的な意思決定理論**
- 12. 強化学習
- 13. オフライン強化学習
- 14. バンディット

出欠コード
XXXX

# 目的（意思決定）を達成する経路の一つに因果推論

- 意思決定は（vNM公理系のもとで）期待効用がわかれば十分
- 期待効用の最大化は因果的推定対象と
  - 因果的推定対象の推定精度が高ければ良い

**十分ではあるとして、必要か？**
**因果推論以外の方法はないのか？**
**そもそも潜在結果を精緻に**
**推定できない場合、**
**人間はどうしているのか？**

意思決定者の
思い

そのためには →

期待効用
$\mathbb{E}\left[u(y_a) \mid x\right]$
の最大化

そのためには →

因果的推定対象
$\mathbb{E}\left[y_a \mid x\right]$
を精緻に推定

その

を精緻に推定

$\arg\min_{f \in \mathcal{F}} L(f; D)$

期待効用理論
vNM公理系

推定精度と
意思決定の関係

3つの仮定
**識別可能性**

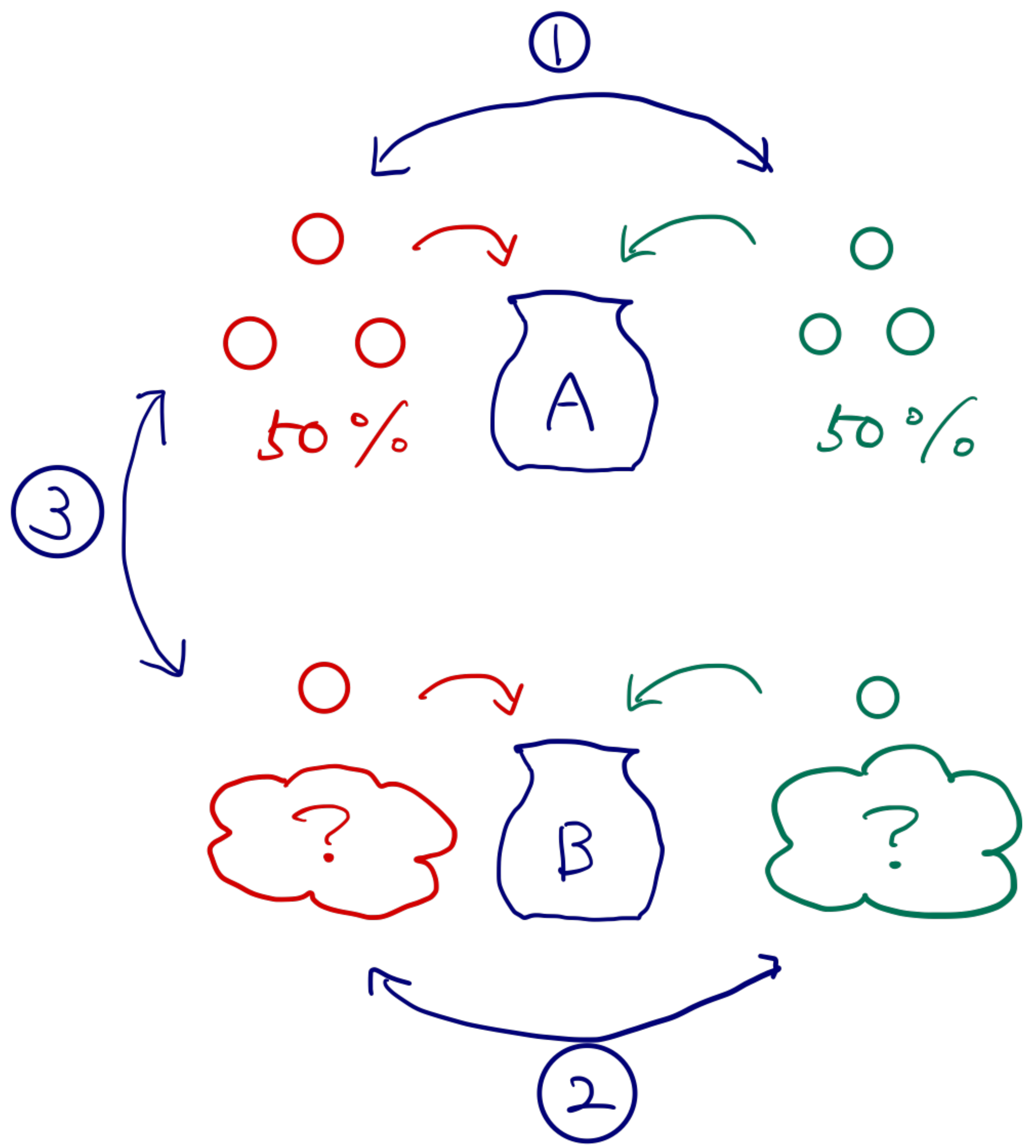
（因果）機械学習
分布シフト対処

# 確率的ではない不確実性：曖昧性



## エルスバーグのパラドックス

- どちらに賭ける？
  - ①赤と緑が半々入っている壺Aから１つ玉を取り出す。赤か緑か
  - ②赤と緑が何%ずつ入っているかわからない壺Bの赤か緑か
  - ③50%だとわかっている壺Aの赤玉か、割合の不明なBの赤玉か
- 人間は確率自体の不確実性（曖昧性）を避けたがる



# 計画

## 未知確率下の意思決定→曖昧性を避ける意思決定→推定の不確実性を避ける意思決定へ

- 期待効用 $\mathbb{E}\left[u(y_a)\,|\,x\right]$ 自体が不確実なときに（人間は）どのように意思決定すべきか / しているのか
  - 不確実性には２種類ある：
    **リスク**（確率的な不確実性・偶発的不確実性）と
    **曖昧性**（確率自体の不確実性、認識論的不確実性、ナイトの不確実性）
  - これらをそれぞれどう扱うか定式化していく
- 確率が未知の場合の意思決定の理論：主観的期待効用理論
  - 曖昧性を避けない場合の理論。曖昧性下の意思決定理論の準備
  - 確率が**一部**未知の場合の意思決定の理論：アンスコム＝オーマンの定理
- 曖昧性を避ける意思決定の理論：マキシミン期待効用理論
- 曖昧性を避ける意思決定を再現した有限データの下での意思決定（次回）

# パラメタに関する（事前）分布とは？

- ベイズ推論
  - ベイズの定理を用いてデータからパラメタの分布を推論する
  - $$p(\theta \mid D) = \frac{p(D \mid \theta)}{\int p(D \mid \theta')p(\theta')\mathrm{d}\theta'} \boxed{p(\theta)}$$

    事前分布って何？
  - 予測時はパラメタに関して期待値をとる： $\hat{y} = \mathbb{E}_{\theta \sim p(\theta \mid D)} \mathbb{E}[y \mid x, \theta]$
- パラメタに関する事前の信念（分布）$p(\theta)$ を仮定していいのか？
  - →「主観的期待効用理論」の公理を満たす意思決定者は常に信念を持っていると仮定してよい

# 主観的期待効用理論の概要



## 確率が未知でも(主観的)期待効用最大化として表現できる
## 主観的確率は選好から推定できる

- そもそも現実には将来の事象についての確率は陽にわかっていない
- 期待効用理論：　maximize $\sum_x \underbrace{p(x)}_{\text{既知}} \underbrace{u(x)}_{\text{未知}}$
- 主観的期待効用理論：　maximize $\sum_x \boxed{\underbrace{p(x)}_{\text{未知}}} \underbrace{u(x)}_{\text{未知}}$
    - いわゆる確率（客観確率）が未知でも、何か確率の公理を満たす関数（測度）$p$が存在して、それに関する期待値最大化として意思決定を捉えることが可能か？またそのための公理は？
    → 主観的期待効用理論（サヴェッジの定理）
    - 諸々の公理のもとで、選好関係をもとに確率 $p$ と効用関数 $u$ を復元できる

# 主観的期待効用理論の準備

出欠コード
XXXX

## 意思決定＝世界の「状態」から結果への関数の選択
## 「状態」がわからないから結果が不確実、と考える

- 期待効用理論用いた結果に関する確率$p(y)$は未知
- 確率を用いずに不確実な事象を表現するための準備
  - 結果 $y \in \mathcal{Y}$：客観的な結果、その上に効用が定義されるもの
    - 効用 $u : \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$
  - 状態 $\omega \in \Omega$:（行動の結果を確定させるのに十分な粒度で定義された）世界のあり方
    - 状態がわかれば結果は確定するが、状態が不確実なために結果が不確実
    - 例) 今日の午後の天気によって出かけた結果が変わる場合、$\Omega = \{晴れ, 曇り, 雨, 雪, \ldots\}$
  - 事象 $A \subset \Omega$：状態の集合、これに対して確率を定義する
  - 行為 $f : \Omega \to \mathcal{Y}, f \in F = \mathcal{Y}^{\Omega}$
  - 選好関係 $\succsim \subset F \times F$

$\Omega$

| 行為 f | 晴れ | 雨 |
|---|---|---|
| ピクニック | 😄 | 😖 |
| 映画館 | 😀 | 😀 |

$F$

$y$

# サヴェッジの公理 1/2

- P1 弱順序　（完備性と推移率）
- P2 確実性原理 sure-thing principle
  - $f_A^h := \begin{cases} h(\omega), & \omega \in A \\ f(\omega), & \omega \notin A \end{cases}$ のように書くと,

    $\forall f, g, h, h' \in F, A \subset \Omega,\ f_A^h \succsim g_A^h$

    iff $f_A^{h'} \succsim g_A^{h'}$

    ↑ if and only if
- P3 単調性 結果 $y, y' \in \mathscr{Y}, y \succsim y'$

  iff $f_A^y \succsim f_A^{y'}$
- P4 信念の独立性

  $\forall y, y', z, z' \in \mathscr{Y}, A, B \subset \Omega,\ z \succ y, z' \succ y'$

  $y_A^z \succ y_B^z$ iff $y_A'^{z'} \succ y_B'^{z'}$

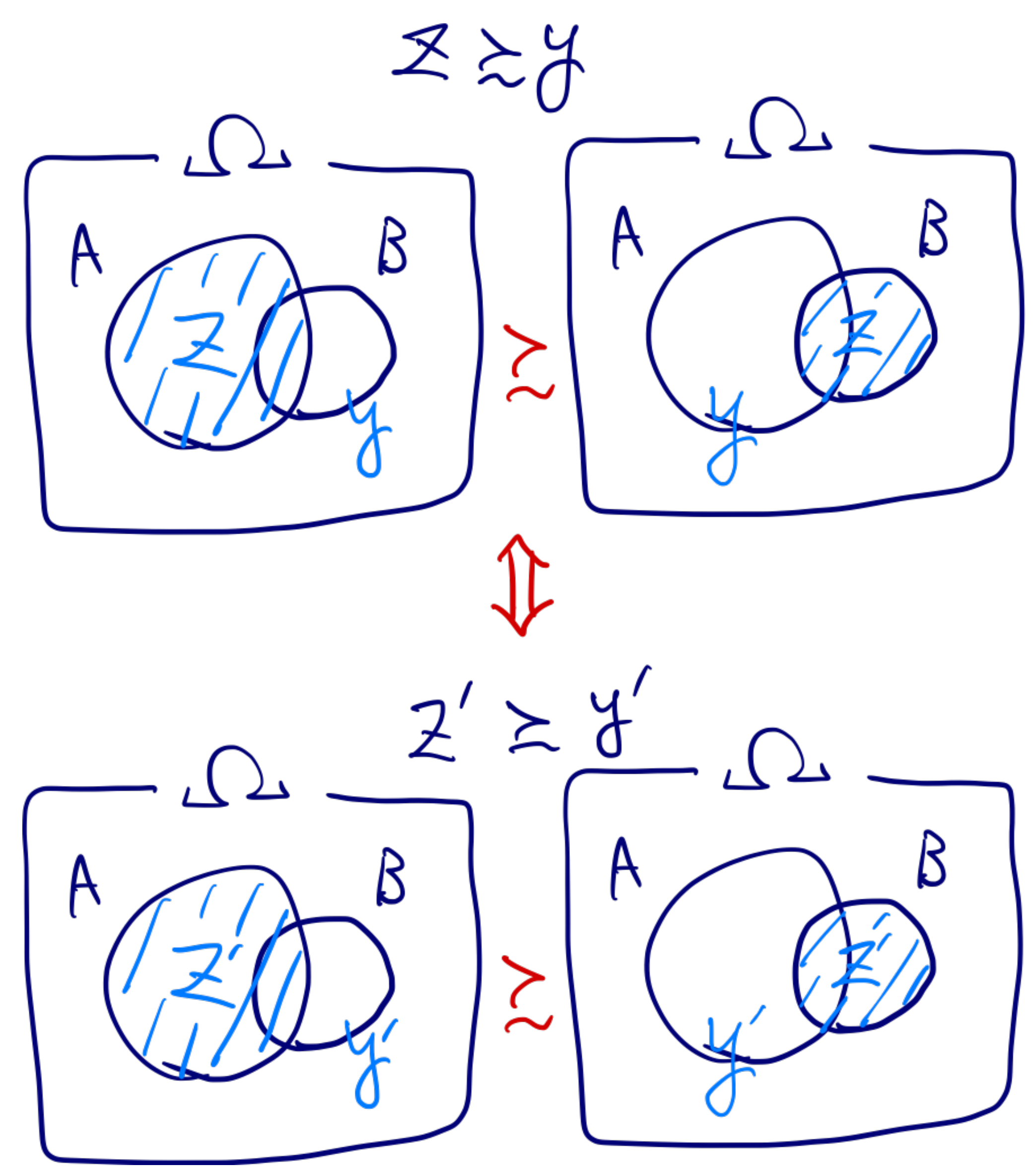
確実性

| $F$ \ $\Omega$ | $A$ | $A^c$ |
|---|---|---|
| $f_A^h$ | $h$ と同じ | $f$ |
| $\succsim$ $g_A^h$ | $h$ | $g$ |

$\Leftrightarrow$

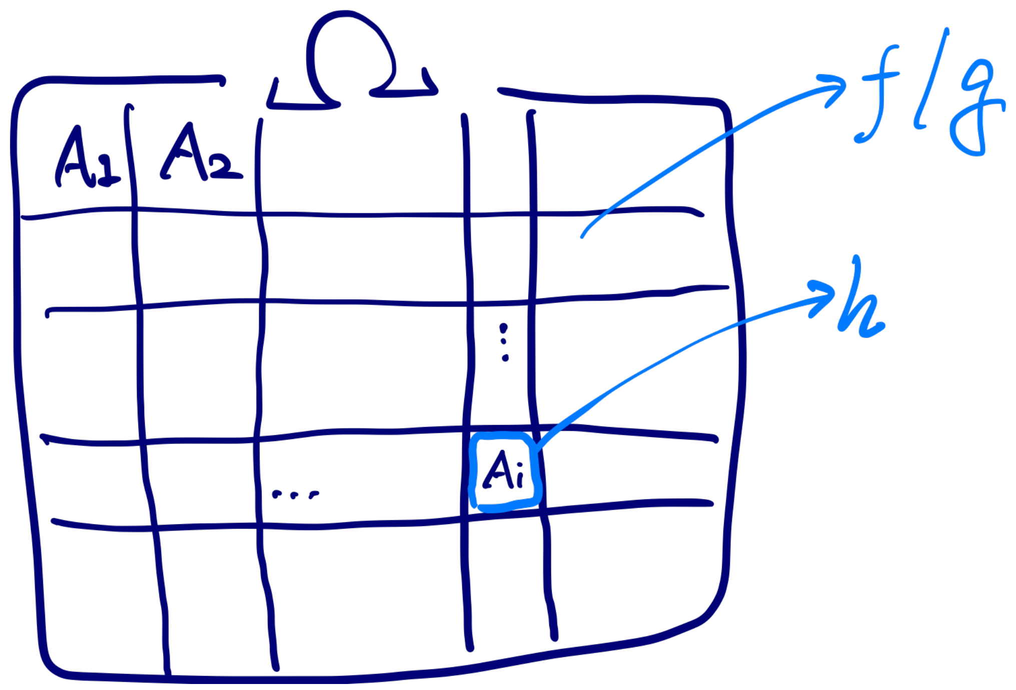
| $F$ \ $\Omega$ | $A$ | $A^c$ |
|---|---|---|
| $f_A^{h'}$ | $h'$ | $f$ |
| $\succsim$ $g_A^{h'}$ | $h'$ | $g$ |

信念の独立性



# サヴェッジの公理 2/2

- P5 非自明性 $\exists f, g, f \succ g$
- P6 連続性 $\forall f, g, h \in F$ s.t. $f \succ g, \exists \{A_i\}_i^n$ : split of $\Omega, f_{A_i}^h \succ g$ and $f \succ g_{A_i}^h$
  - (“確率”が)十分小さい事象に分割すれば、その1つに関して別の行動 $h$ に置き換えても選好に影響しない
  - $|\Omega| = \infty$を含意、非原子的（どこまででも分割可能な）測度

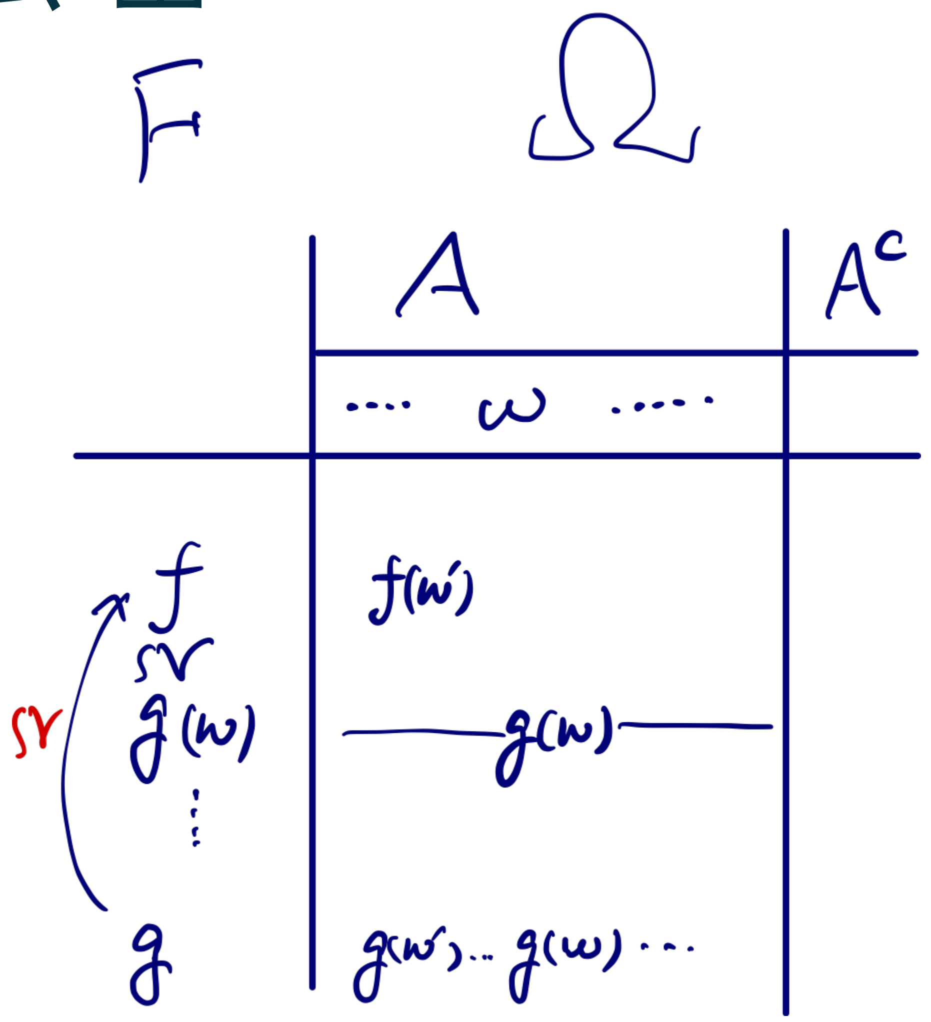



- P7 無限の結果集合（$|\mathcal{Y}| = \infty$）のための追加公理

$$\forall \omega \in A,\ f \succsim_A g(\omega) \ \Rightarrow\ f \succsim_A g,$$

$$\forall \omega \in A,\ g(\omega) \succsim_A f \ \Rightarrow\ g \succsim_A f$$

  - $\succsim_A$: $A \subset \Omega$ がおこった元での選好関係



# サヴェッジの定理



## 公理P1—P7のもとで、状態に関する主観的確率が存在し、意思決定＝主観的期待効用最大化

- 定理（サヴェッジ）
  - 選好関係 $\succsim$ が公理 P1—P7 を満足するのは、$\Omega$ 上に非原子的で有限加法的な確率測度 $\mu$ が存在し、かつあらゆる $f, g \in F$ に対して

$$f \succsim g \text{ iff } \int_\Omega u(f(\omega))\mathrm{d}\mu(\omega) \geq \int_\Omega u(g(\omega))\mathrm{d}\mu(\omega)$$

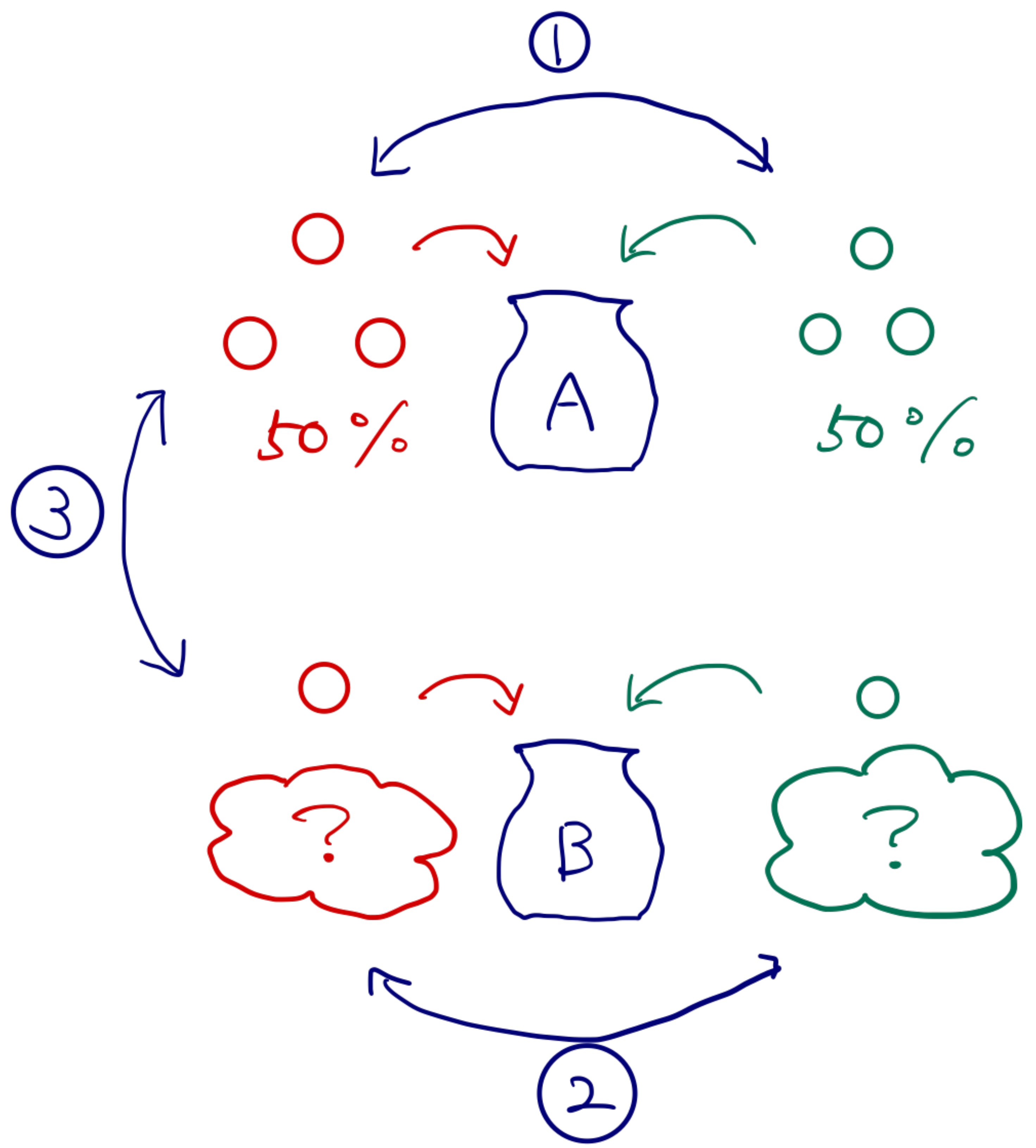
であるような非定数関数 $u : X \to \mathbb{R}$ が存在する時、かつその時のみである。
さらに、この場合、 $\mu$ は一意であり、 $u$ は正の線形変換を除いて一意である。

  - ※ 測度が非原子的であるとは、次のような事象 $A \in \Omega$ が存在しないこと
    - $\mu(A) > 0$ のとき $\forall B \subset A$ に関して $\mu(B) = 0$ または $\mu(B) = \mu(A)$ が成立する

出欠コード
XXXX

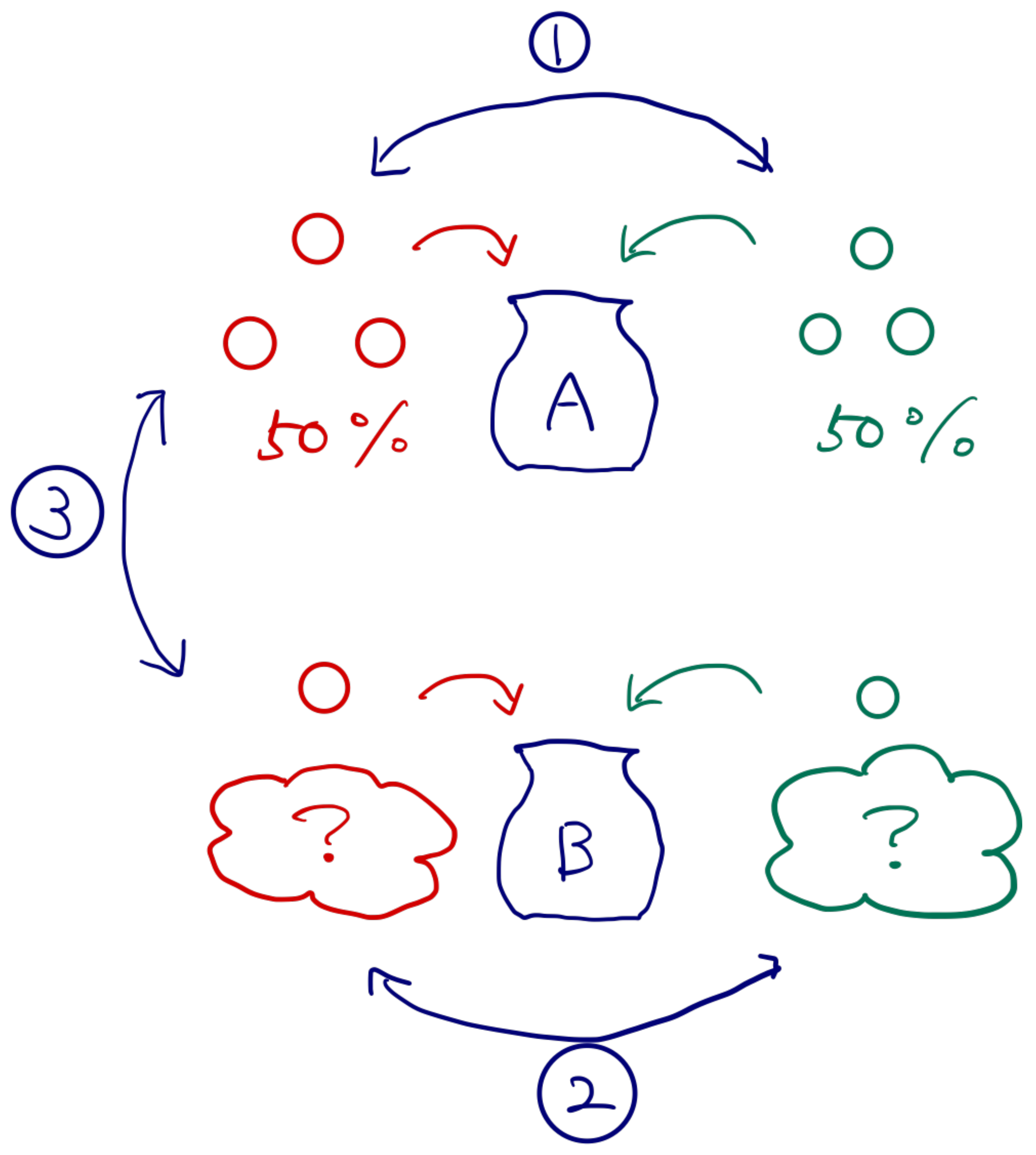
## 人間は本当に主観確率を最大化しているのか？

- ①赤と緑が半々入っている壺Aから１つ玉を取り出す。赤か緑かどちらに賭ける？
- ②赤と緑が何%ずつ入っているかわからない壺B
  赤か緑かどちらに賭ける？
- ③50%だとわかっている壺Aの赤玉か、何%か不明なBの赤玉か、どちらに賭ける？



# ２つの不確実性（リスク回避と曖昧さ回避）

- ①赤と緑が半々入っている壺Aから１つ玉を取り出す
  →どちらでも
- ②赤と緑が何%ずつ入っているかわからない壺B
  →どちらでも
  ⇒ 情報がない時、50%ずつ入っているという主観確率を持っていることになる
- ③50%だとわかっている壺Aの赤玉か、何%か不明なBの赤玉か→壺A
  主観確率 50% どうしで同じなのになぜ？
- リスク回避のほかに、**曖昧さ回避** (Ambiguity aversion) の傾向がある



# 確実性原理（P2）に違反

- 確実性原理
  - $\forall f, g, h, h' \in F, D \subset \Omega, f_D^h \succsim g_D^h$ iff $f_D^{h'} \succsim g_D^{h'}$
- 「壺Aを選べば赤が、壺Bを選べば緑が出る」という状態を AB のように書く
  - 両方が出る、というような事象が無いことを考えれば、状態集合は（選択した後でのランダム性を考えずとも）これでＯＫ
- D = {AB, AB} (壺の選び方で出る色が変わるという事象) について考えると、
  - A(ω) = B(ω)，A(ω) = B(ω) $\forall \omega \in D$
  - A(ω) = B(ω)，A(ω) = B(ω) $\forall \omega \notin D$
  - よって「基本AだけどDの場合はB」という選択 $A_D^B$ はAと同じ結果なので $A_D^B = A$。

    同様に表に照らして $A_D^B = B$、$A_D^B = B$、$A_D^B = A$ と確かめられる。(★)
- P2から $A_D^B \succsim A_D^B$ iff $A_D^B \succsim A_D^B$ であるが、各項をそれぞれ(★)の右辺で置き換えるとP2は

  A≿B⇔B≿A を含意することになる。
- 観察されているのは A~A≻B~B なので矛盾。

$\Omega$

| | $D^c$ | $D$ | | $D^c$ |
|---|---|---|---|---|
| 壺Aの赤に賭ける↓ | AB | AB | AB | AB |
| F: A | ○ | ○ | × | × |
| A | × | × | ○ | ○ |
| B | ○ | × | ○ | × |
| B | × | ○ | × | ○ |

# 主観・客観混合確率の期待効用最大化

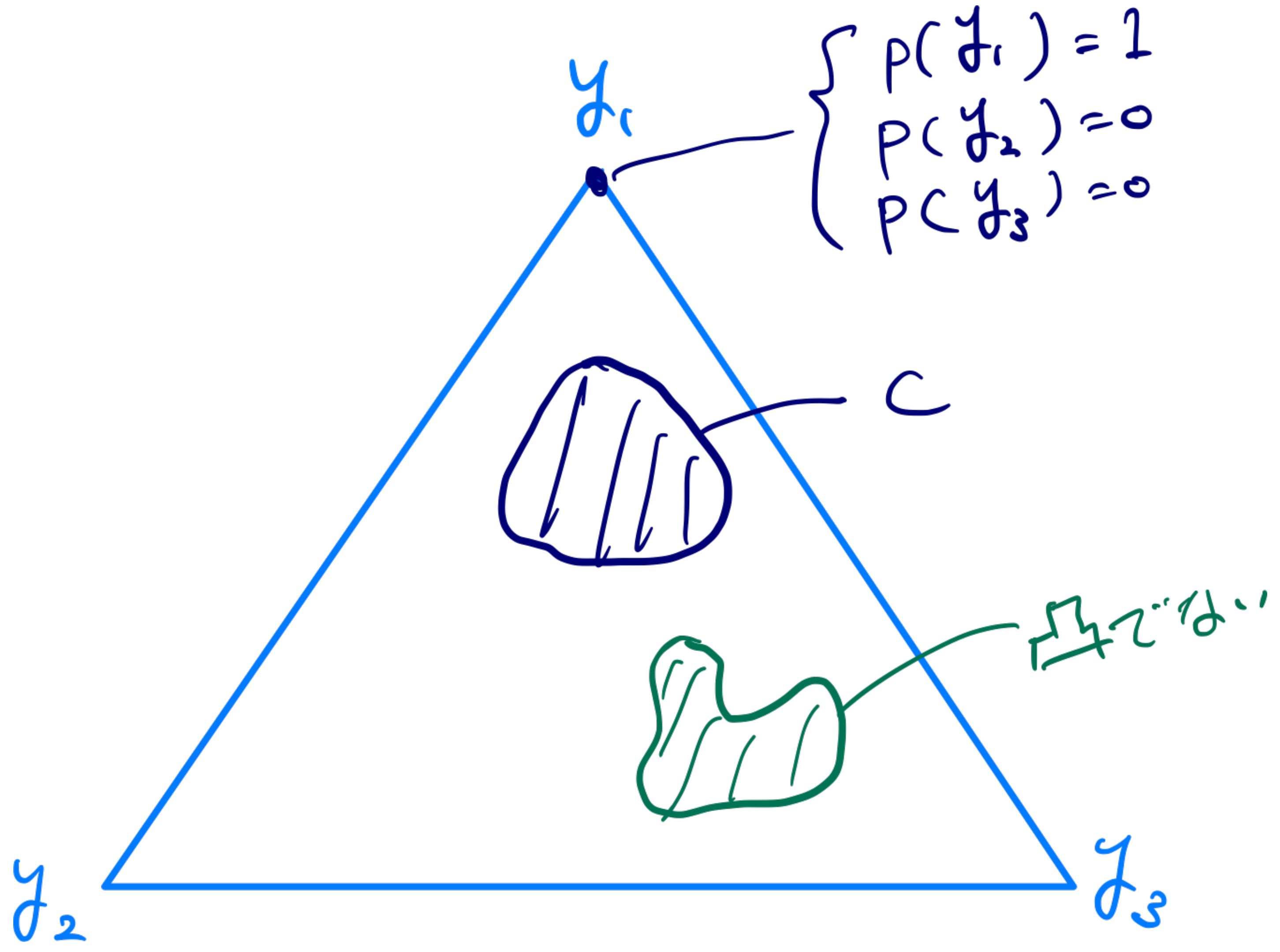
- 行為$f$は 状態$\Omega$→結果$\mathscr{Y}$ の写像　というサヴェッジを拡張し、行為$f$は 状態$\Omega$→結果$\mathscr{Y}$上の確率分布（クジ）$\Delta(\mathscr{Y})$とする
- AA1(弱順序) $\succsim$ は完備で推移的である
- AA2(連続性) あらゆる$f, g, h \in F$に対して$f \succ g \succ h$なら
  $\exists \alpha, \beta \in (0,1)$ s.t. $\alpha f + (1-\alpha)h \succ g \succ \beta f + (1-\beta)h$
- AA3(独立性) あらゆる$f, g, h \in F$と$\alpha \in (0,1)$に対して
  $f \succsim g$ iff $\alpha f + (1-\alpha)h \succsim \alpha g + (1-\alpha)h$
- AA4(単調性) あらゆる$f, g \in F$について、すべての$\omega \in \Omega$に対して$f(\omega) \succsim g(\omega)$ ならば $f \succsim g$
- AA5(非自明性) $f \succ g$ であるような $f, g \in F$ が存在する
- **定理（アンスコム＝オーマン）**　：$\succsim$ が公理1–5を満たすのは、$\Omega$上の確率測度$\mu$と、あらゆる$f, g \in F$ について
  $f \succsim g$ iff $\int_\Omega \mathbb{E}_{f(\omega)}[u]\mathrm{d}\mu(\omega) \geq \int_\Omega \mathbb{E}_{g(\omega)}[u]\mathrm{d}\mu(\omega)$ であるような非定数関数$u : \mathscr{Y} \to \mathbb{R}$ が存在するとき、その時のみである。
  さらにこの場合、$\mu$は一意で、$u$は正の線形変換に対して不変である。

# マキシミン期待効用（Maximin expected utility; MEU）

出欠コード
XXXX

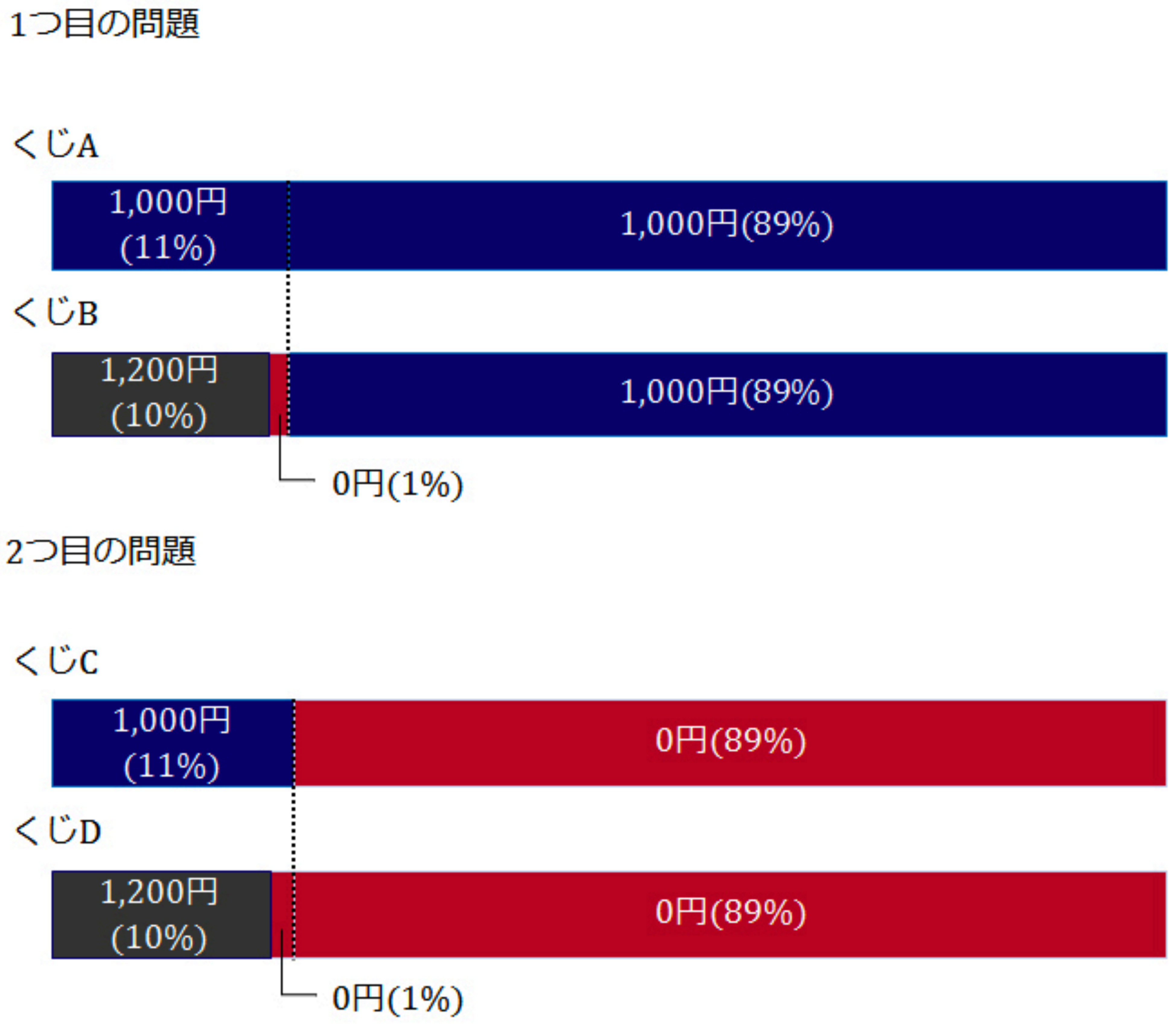
## 複数の確率の期待値の最小値で不確実性回避を表現

- 信念を１つの確率分布ではなく確率分布の集合で表す
- AAの公理1,2,4,5に加え、以下を公理とする
  - AA3’ 弱い独立性（C-独立性）：あらゆる $f, g, \in F$, **定数**$h \in F$, $\alpha \in (0,1)$ に対して $f \succsim g$ iff $\alpha f + (1-\alpha)h \succsim \alpha g + (1-\alpha)h$
    - 定数$h$とは、状態$\omega$によらない客観確率をもつ行動。任意の行動から
  - **不確実性回避**：$f \sim g$なら$\forall \alpha \in (0,1)$, $\alpha f + (1-\alpha)g \succsim f$
- **定理（ギルボア＝シュマイドラー）**
公理AA1,2,4,5とC-独立性,不確実性回避を満足するのは、
状態Ω上の閉かつ凸の確率の集合$C \subset \Delta(\Omega)$と、あらゆる$f, g \in F$ に対し
  - $f \succsim g$ iff $\min_{p \in C} \int_\Omega \mathbb{E}_{f(\omega)}[u] \mathrm{d}p(\omega) \geq \min_{p \in C} \int_\Omega \mathbb{E}_{g(\omega)}[u] \mathrm{d}p(\omega)$
    - $f, g$ は結果$\mathcal{Y}$上の客観確率
- であるような非定数効用関数$u$が存在するとき、かつそのときのみ。
さらにこの場合、$C$は一意で、$u$も正の線形変換を除いて一意。



# 人間は100%を好む

- アレのパラドックス
  - くじA>B, C<D と選ばれがち
    - 独立性公理に反する
      - A’(1000円)=1, B’(1200円)=10/11, B’(0円)=1/11 に対して R(1000円)=1 を89%混ぜるか R’(0円)=1 を混ぜるか によって選好が変わる
  - →期待効用（効用の期待値）で表現不能
    - くじA: u(1000円)
    - くじB: u(1000円)*0.89 + u(1200円)*0.1
    - → u(1000円) > u(1000円)*0.89 + u(1200円)*0.1
      → u(1000円)*0.11 > u(1200円)*0.1
    - くじC: u(1000円)*0.11
    - くじD: u(1200円)*0.1
    - → u(1000円)*0.11 < u(1200円)*0.1

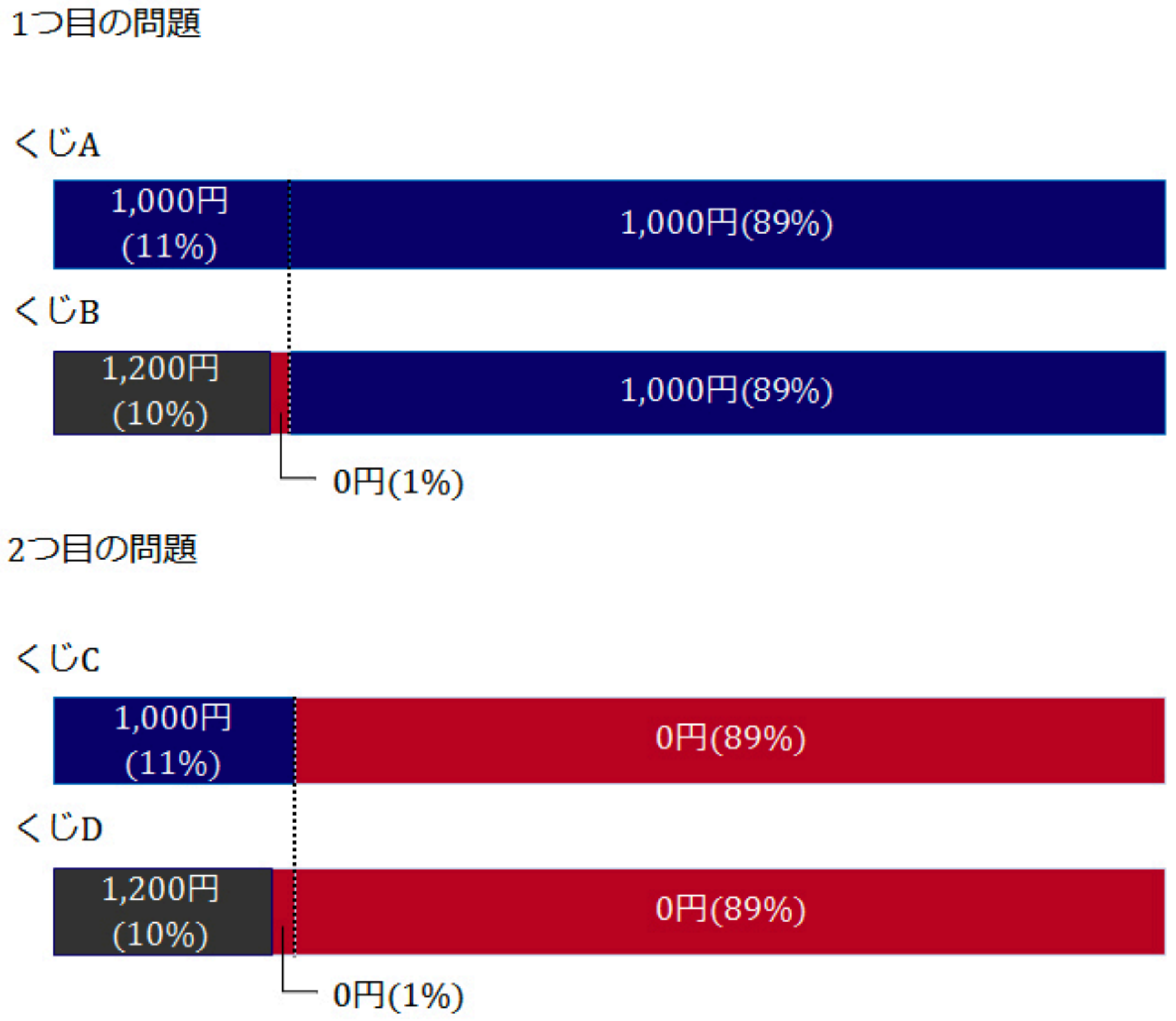


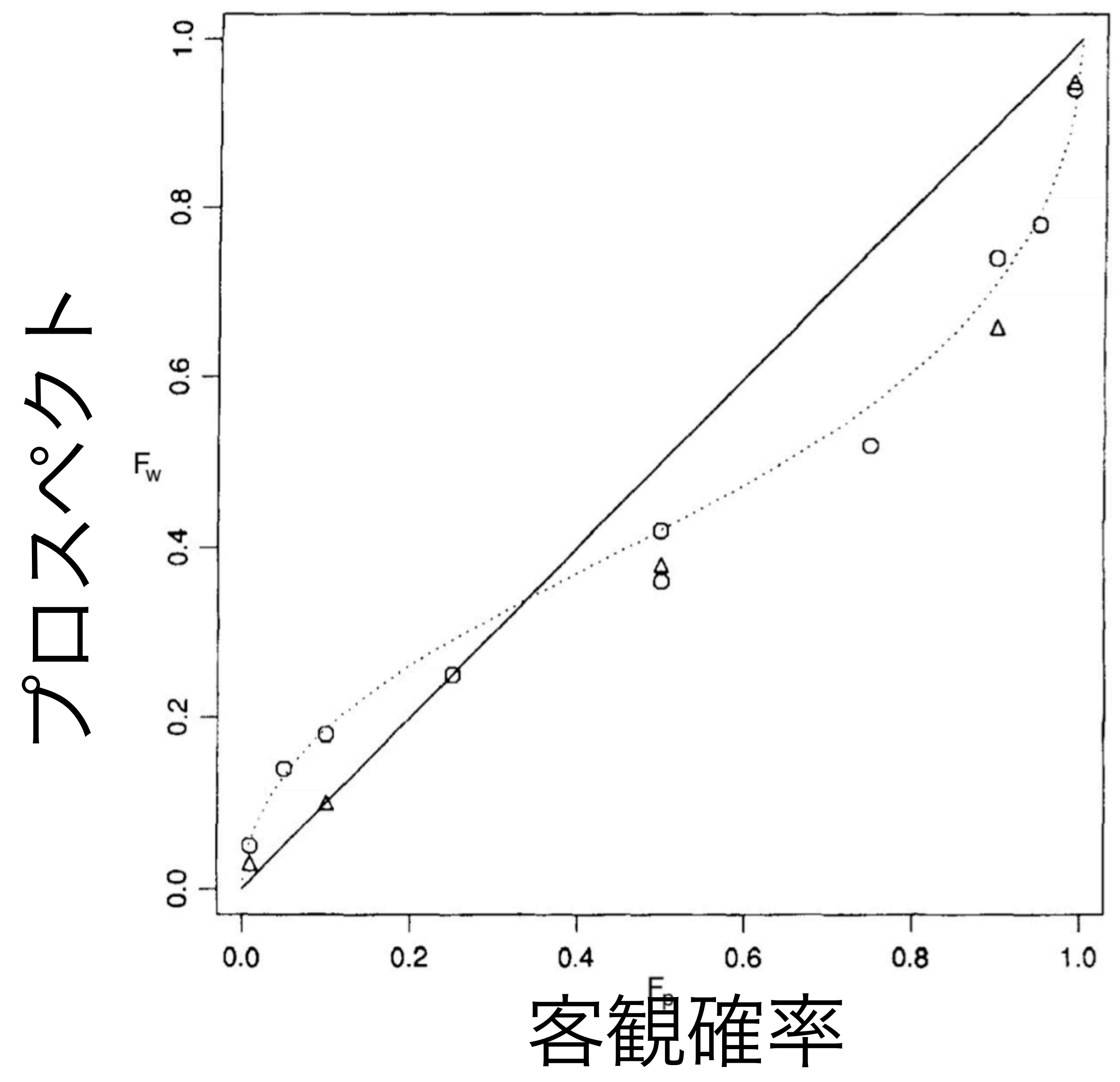
# （参考）プロスペクト理論

出欠コード
XXXX

## 効用関数と主観的な確率（っぽいもの）の心理学的傾向

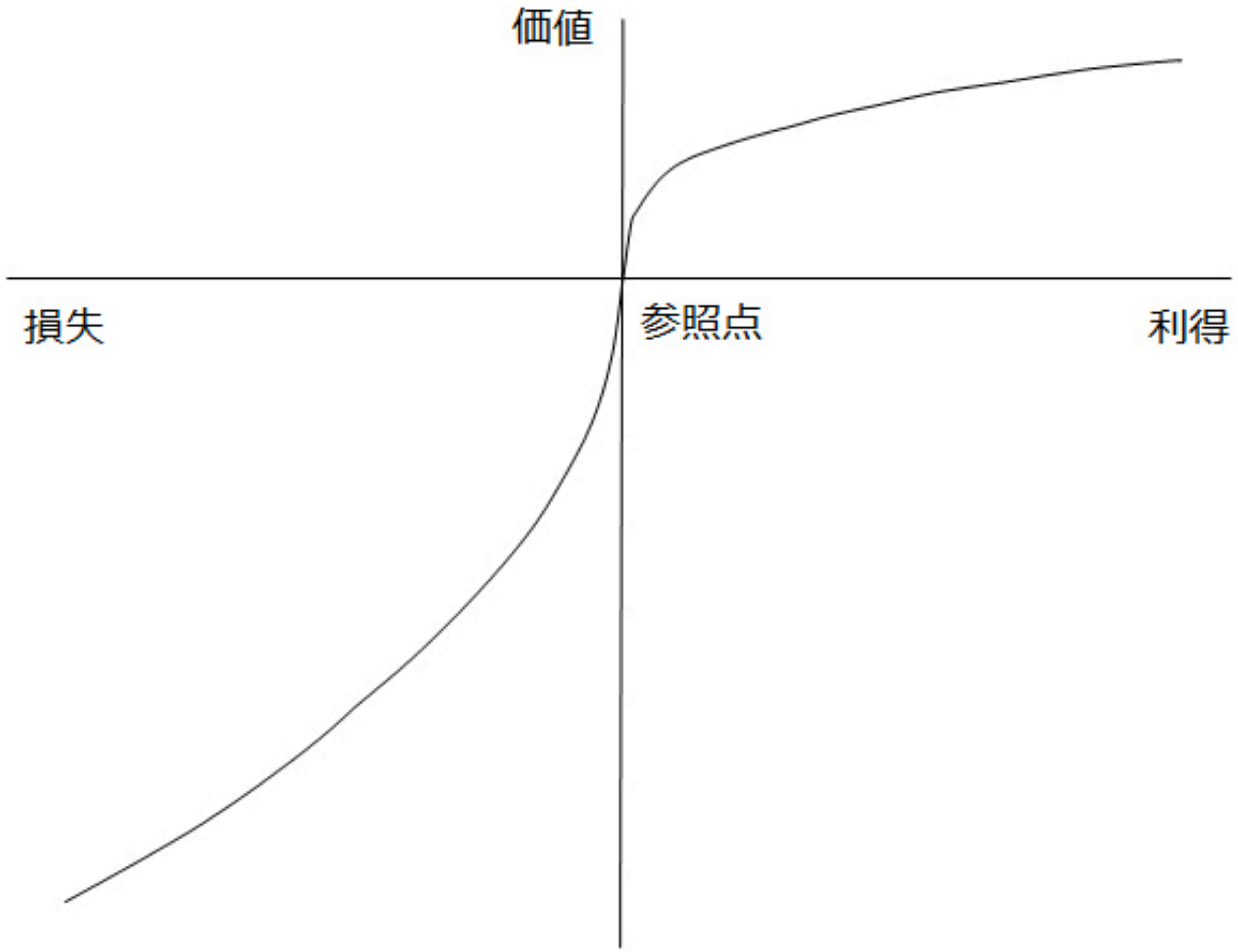
- アレのパラドックス（右図）
  - くじA>B, C<D と選ばれがち
  - 期待効用で表現不能
- →プロスペクト理論
  - 人間は(非合理な)選好のバイアスを持つ
  - “参照点”を境にリスク選好の反転
  - 確率の公理を満たさない”プロスペクト”を持つように振る舞う



# 参照点を挟んだリスク選好の反転・非対称性

- 参照点を境にリスク選好が逆転
  - +100万と+200万はそれほど変わらない ⇒ 確実に100万得たい
  - -100万 → -200万 となる効用差分より -100万 → 0万 となる差分が大きい ⇒ リスクを冒しても取り戻したい
- 点対称ではない
  - 利得は満足度が頭打ちだが損失には「下のまた下」がある




リスク選好的 ↔ リスク回避的

## 確率未知（曖昧性）の下での意思決定理論を扱った

- 不確実性には２種類ある
  - 客観的確率で表される不確実性：リスク（偶発的不確実性）
  - 確率自体の不確実性：曖昧性（認識論的不確実性）
- 確率が未知でも、それぞれ一定の公理のもとで以下がいえる
  - 主観的期待効用理論：公理P1—7に従う意思決定者は、主観的な確率と効用を持っていて、主観確率に関する期待効用を最大化している・すべき
  - マキシミン期待効用理論：公理AA1,2,3’,4,5および曖昧性回避の公理に従う意思決定者は、確率分布の凸集合を信念として持ち、その中の最悪ケースの期待効用を最大化している・すべき